516.35
K96u

Kummer

Über die flachen vierten grades, auf welchen schaaren von kegelschnitten liegen.

1863.

KUMMER

Surfaces of 4th order

Ueber die Flächen vierten Grades.

97755

Auszug aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

16. Juli 1863. Gesammtsitzung der Akademie.

Hr. Kummer las über die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen.

Die allgemeine Untersuchung aller Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten Statt haben, und welche darum als durch Bewegung eines veränderlichen Kegelschnitts entstanden betrachtet werden können, stützt sich hauptsächlich auf folgenden Satz:

> Wenn eine Ebene aus irgend einer Fläche eine Curve mit Doppelpunkten ausschneidet, so ist jeder dieser Doppelpunkte entweder ein Doppelpunkt der Fläche, oder ein Berührungspunkt der Ebene und der Fläche.

Unter Doppelpunkten einer Curve oder Fläche sind hier alle diejenigen singulären Punkte zu verstehen, für welche die ersten Ableitungen gleich Null werden; eine continuirliche Reihe solcher Doppelpunkte auf einer Fläche bildet eine Doppelpunktscurve derselben. Der Begriff der Berührung ist im engeren Sinne gefafst, so dafs nicht jede durch einen Doppelpunkt einer Fläche gehende Ebene als eine in diesem Punkte berührende angesehen wird, sondern nur diejenigen Punkte als eigentliche Berührungspunkte gelten, deren unendlich nahe Punkte nach allen Richtungen hin als zugleich auf der Fläche und der Ebene liegend zu betrachten sind, in so fern in denselben die Abstände der Fläche von der Ebene unendlich kleine Gröfsen höherer Ordnungen sind.

Wenn eine Ebene aus einer Fläche vierten Grades einen Kegelschnitt ausschneidet, so mufs sie zugleich noch einen zweiten Kegelschnitt ausschneiden. Ein solches Kegelschnittpaar, als Curve vierten Grades betrachtet, hat nothwendig vier Doppelpunkte, welche real oder imaginär, oder auch unendlich entfernt sein können, und von denen auch zwei oder mehrere in einen zusammenfallen können, wenn die beiden Kegelschnitte sich berühren. Zerfällt einer dieser beiden Kegelschnitte in zwei grade Linien, so sind fünf Doppelpunkte vorhanden, und wenn beide Kegelschnitte in grade Linien zerfallen, so bilden sie sechs Doppelpunkte. Umgekehrt, wenn eine Ebene aus einer Fläche vier-

516.35
K96u

ten Grades eine Curve mit vier, oder mehr als vier Doppelpunkten ausschneidet, so besteht diese Curve vierten Grades nothwendig aus Curven niederer Grade, weil eine irreductible Curve vierten Grades nicht mehr als drei Doppelpunkte haben kann. Diese Curven niederen Grades sind, wenn nicht mehr als vier Doppelpunkte vorhanden sind, und wenn nicht drei derselben in einer graden Linie liegen, nothwendig zwei Kegelschnitte, wenn aber drei dieser vier Doppelpunkte in grader Linie liegen, so zerfällt die Curve vierten Grades nur in eine grade Linie und eine Curve dritten Grades mit einem Doppelpunkte. Hat der Schnitt der Ebene und der Fläche vierten Grades fünf Doppelpunkte, so besteht er aus einem Kegelschnitt und zwei graden Linien, hat er sechs Doppelpunkte, so besteht er aus vier graden Linien.

Um die uneigentlichen Flächen vierten Grades, welche aus zwei Flächen zweiten Grades bestehen, von der folgenden Untersuchung überall auszuschliefsen, braucht man den Satz, dafs diejenigen Flächen vierten Grades, aus welchen alle beliebigen Ebenen Kegelschnittpaare ausschneiden, nur aus zwei Flächen zweiten Grades bestehen können, oder noch besser den folgenden mehr aussagenden Satz, dessen strenger Beweis auf algebraischem Wege ohne besondere Schwierigkeit geführt werden kann:

> Wenn alle durch einen festen Punkt gehenden Ebenen aus einer Fläche vierten Grades Kegelschnittpaare ausschneiden, so besteht dieselbe aus zwei Flächen zweiten Grades, mit Ausnahme des einen Falles, wo sie ein Kegel vierten Grades ist, und die schneidenden Ebenen alle durch den Mittelpunkt desselben gehen.

Es werden nun folgende Fälle besonders behandelt: erstens, wo die Schaar der Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, nicht eine Schaar von berührenden Ebenen der Fläche ist; zweitens, wo alle Ebenen dieser Schaar Tangentialebenen mit einem Berührungspunkte sind, und drittens, wo dieselben doppelt berührende Ebenen sind. Es würden eigentlich noch die beiden Fälle hinzuzunehmen sein, wo eine Schaar von Ebenen

p. 41954

die Fläche dreifach berührt und wo sie die Fläche in einer graden Linie berührt; die dreifach berührenden Ebenen, welche hier nur solche sein können, die durch eine auf der Fläche liegende grade Linie gehen, ergeben aber keine bemerkenswerthen Schaaren von Kegelschnittpaaren auf Flächen vierten Grades, und eine Schaar von Ebenen, welche in einer ganzen Linie berühren, findet nur auf den abwickelbaren Flächen vierten Grades Statt, von welchen unmittelbar klar ist, dafs eine jede ihrer Tangentialebenen aufser einer graden Doppellinie noch einen Kegelschnitt ausschneidet.

1. Die Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren von nicht berührenden Ebenen Kegelschnitte ausschneiden.

Wenn eine Schaar von Ebenen, welche eine Fläche vierten Grades nicht berühren, aus derselben Kegelschnittpaare ausschneiden soll, so mufs jede Ebene dieser Schaar nothwendig durch vier Doppelpunkte der Fläche hindurch gehen. Ist nun keiner dieser vier Doppelpunkte für alle Ebenen der Schaar derselbe, sondern alle vier Doppelpunkte von einer Ebene zur andern veränderlich, so mufs die Fläche vierten Grades nothwendig eine Doppelpunktscurve vierten Grades haben. Hieraus folgt weiter, dafs alle beliebigen, auch jener Schaar nicht angehörenden Ebenen aus der Fläche Curven mit vier Doppelpunkten, also Kegelschnittpaare ausschneiden müssen, dafs also die Fläche vierten Grades nur aus zwei Flächen zweiten Grades bestehen kann.

Ist einer der vier Doppelpunkte für alle Ebenen der Schaar derselbe, so müssen die drei anderen, von einer Ebene zur andern veränderlichen Doppelpunkte eine Doppelpunktscurve dritten Grades für die Fläche bilden, welche diesen einen festen Doppelpunkt der Fläche nicht enthält; es müssen darum alle durch diesen festen Punkt gehenden Ebenen Curven vierten Grades mit vier Doppelpunkten, also Kegelschnittpaare ausschneiden, welches nach dem oben aufgestellten Satze nur dann möglich ist, wenn die Fläche vierten Grades aus zwei Flächen zweiten Grades besteht, oder wenn sie eine Kegelfläche ist.

Sind von den vier Doppelpunkten, welche jede Ebene der Schaar aus der Fläche vierten Grades ausschneiden soll, zwei für alle Ebenen dieselben und nur zwei von einer Ebene zur andern veränderlich, so mufs diese Fläche aufser den zwei festen

Doppelpunkten, durch welche alle Ebenen der Schaar hindurchgehen, noch eine Doppelpunktscurve zweiten Grades haben; und umgekehrt, wenn sie eine Doppelpunktscurve zweiten Grades und aufserdem zwei einzelne Doppelpunkte hat, so schneiden alle durch diese beiden festen Doppelpunkte gehenden Ebenen Curven mit vier Doppelpunkten aus der Fläche aus, also Kegelschnittpaare, wenn nicht etwa die Verbindungslinie beider Doppelpunkte durch die Doppelpunktscurve hindurchgeht, in welchem Falle diese Verbindungslinie eine auf der Fläche liegende grade Linie sein müfste. Man hat also folgenden Satz:

> Alle Flächen vierten Grades mit einer Doppelpunktscurve zweiten Grades und zwei einzelnen Doppelpunkten, deren Verbindungslinie nicht durch die Doppelpunktscurve hindurchgeht, werden von der Schaar der durch die beiden Doppelpunkte gehenden Ebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten.

Die allgemeinste Form der Gleichung für alle Flächen vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades haben, ist:

$$\phi^2 = 4p^2\psi,$$

wo ϕ und ψ ganze rationale Funktionen zweiten Grades sind, und p eine lineare Funktion der drei Coordinaten. Nimmt man in derselben ψ als Produkt zweier linearen Funktionen q und r, so erhält man

$$\phi^2 = 4p^2 q r,$$

und dieses ist die allgemeinste Form der Gleichung aller Flächen vierten Grades, welche aufser der Doppelpunktscurve zweiten Grades noch zwei Doppelpunkte haben, deren Verbindungslinie nicht eine auf der Fläche liegende grade Linie ist. Die Curve $\phi = 0$, $p = 0$ ist die Doppelpunktscurve zweiten Grades, und die beiden Durchschnittspunkte der graden Linie $q = 0$, $r = 0$, mit der Fläche zweiten Grades $\phi = 0$, sind die beiden Doppelpunkte der Fläche vierten Grades. Alle durch die Axe $q = 0$, $r = 0$ gehenden Ebenen schneiden Kegelschnittpaare aus der Fläche aus, die beiden Ebenen $q = 0$ und $r = 0$ schneiden Kegelschnittpaare aus, die sich decken, und sind singuläre Tangen-

tialebenen der Fläche, welche dieselbe in diesen Kegelschnitten berühren.

Die Flächen vierten Grades, welche aufser der Doppelpunktscurve zweiten Grades noch zwei Paare von Doppelpunkten haben und zwei durch dieselben hindurchgehende Büschel von Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, sind alle in folgender Form enthalten:

$$(p^2 + qr - st)^2 = 4p^2qr,$$

oder was dasselbe ist:

$$(p^2 - qr + st)^2 = 4p^2st,$$

wo p, q, r, s, t beliebige lineare Funktionen der Coordinaten sind, welche Gleichung auch in folgende einfache Form gesetzt werden kann:

$$p + \sqrt{qr} + \sqrt{st} = 0.$$

Die beiden Büschel von Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, sind $q + \lambda r = 0$ und $s + \mu t = 0$, für beliebige Werthe der Constanten λ und μ, die Ebenen $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$ sind vier singuläre Tangentialebenen der Fläche, welche dieselbe in Kegelschnitten berühren, also einhüllen. Da diese Flächen aufser der Doppelpunktscurve zweiten Grades $p = 0$, $qr - st = 0$, noch vier einzelne Doppelpunkte haben, deren zwei durch die Gleichungen $q = 0$, $r = 0$, $p^2 - st = 0$, die beiden anderen durch die Gleichungen $s = 0$, $t = 0$, $p^2 - qr = 0$ gegeben sind, und da diese vier Doppelpunkte auf sechs verschiedene Weisen sich zu zweien verbinden lassen, so könnte man erwarten, dafs sechs verschiedene Schaaren von Kegelschnittpaaren, deren Ebenen durch die sechs Verbindungslinien der vier Doppelpunkte gehen, auf denselben Statt haben möchten; untersucht man aber die Lage der vier Doppelpunkte genauer, so findet man, dafs von den sechs Verbindungslinien derselben vier durch die Doppelpunktscurve zweiten Grades hindurchgehen und darum auf der Fläche vierten Grades liegende grade Linien sind, und dafs die beiden Ebenenbüschel $q + \lambda r = 0$, und $s + \mu t = 0$ die einzigen sind, welche Kegelschnittpaare ausschneiden.

In diese Kategorie von Flächen vierten Grades gehört unter andern auch die zuerst von Hrn. Charles Dupin behandelte

und mit dem Namen Cyclide belegte Fläche, deren beide Schaaren von Krümmungslinien Kreise sind. Die Doppelpunktscurve zweiten Grades liegt bei derselben im Unendlichen, und von den vier einzelnen Doppelpunkten sind stets zwei imaginär, die beiden anderen aber können real sein. Die Gleichung dieser Fläche kann in folgende einfache Form gesetzt werden:

$$b^2 = \sqrt{(ax - ek)^2 + b^2y^2} + \sqrt{(ex - ak)^2 - b^2z^2}.$$

Die allgemeine Untersuchung führt nun weiter zu dem Falle, wo die Schaar von Ebenen, welche Kegelschnittpaare aus der Fläche vierten Grades ausschneiden sollen, durch drei oder mehrere feste Doppelpunkte der Fläche hindurchgeht. Eine Schaar solcher Ebenen kann aber nur dann Statt haben, wenn alle diese Doppelpunkte in grader Linie liegen, welche eine grade Doppelpunktslinie der Fläche ist. Dieser Fall giebt unmittelbar folgenden Satz:

> Aus einer jeden Fläche vierten Grades, welche eine grade Doppelpunktslinie hat, schneiden alle durch die Doppelpunktslinie gelegten Ebenen Kegelschnitte aus.

Die Gleichungen der Flächen dieser Kategorie sind alle in folgender Form enthalten:

$$p^2\phi + 2pq\phi_1 + q^2\phi_2 = 0$$

wo ϕ, ϕ_1, ϕ_2 beliebige Funktionen zweiten Grades, p und q lineare Funktionen der Coordinaten sind, $p = 0$, $q = 0$ ist die Linie der Doppelpunkte.

Endlich bleiben hier noch die Fälle zu untersuchen, dafs von den vier Doppelpunkten der Kegelschnittpaare, welche von einer Schaar von Ebenen ausgeschnitten werden sollen, zwei oder mehrere in einem, oder in zwei festen Punkten vereinigt sind, in welchen diese Kegelschnittpaare sich berühren. Die vollständige Erörterung aller dieser Fälle ergiebt zunächst nur eine speciellere Fläche der bereits gefundenen Art $\phi^2 = 4p^2qr$, mit einer Doppelpunktscurve zweiten Grades und zwei Doppelpunkten, nämlich diejenige, in welcher die beiden Doppelpunkte unendlich nahe an einander liegen, aufserdem aber führt sie auf eine neue merkwürdige Art von Flächen vierten Grades, auf

welchen eine Schaar von Kegelschnittpaaren liegen, die einen doppelten Contakt haben. Es sind diefs die Flächen vierten Grades, welche in zwei verschiedenen Punkten sich selbst berühren. Legt man nämlich durch die beiden Selbstberührungspunkte einer solchen Fläche irgend eine Ebene, so schneidet dieselbe eine Curve aus, welche in diesen beiden Punkten sich selbst berührt; eine Curve vierten Grades kann aber nicht zwei Punkte der Selbstberührung haben, aufser wenn sie aus zwei Kegelschnitten besteht, man hat also folgenden Satz:

> Die Flächen vierten Grades, welche in zwei verschiedenen Punkten sich selbst berühren, haben die Eigenschaft, dafs alle durch die beiden Selbstberührungspunkte gehenden Ebenen aus ihnen Kegelschnittpaare ausschneiden, welche sich in diesen beiden Punkten berühren.

Die allgemeinste Form der Gleichung für diese Art von Flächen ist:

$$\phi^2 = ap^4 + 4bp^3q + 6cp^2q^2 + 4dpq^3 + eq^4,$$

wo ϕ eine Funktion zweiten Grades ist, p und q lineare Funktionen und a, b, c, d, e Constanten. Die beiden Punkte, in denen diese Fläche sich selbst berührt, sind die Durchschnittspunkte der graden Linie $p = 0$, $q = 0$ mit der Fläche zweiten Grades $\phi = 0$. Alle Ebenen des Büschels $p + \lambda q = 0$ schneiden Kegelschnittpaare mit doppeltem Contakt aus der Fläche aus, die vier Ebenen aber, in welche der Ausdruck vierten Grades

$$ap^4 + 4bp^3q + 6cp^2q^2 + 4dpq^3 + eq^4 = 0$$

zerfällt werden kann schneiden aus der Fläche Kegelschnittpaare aus, die sich vollständig decken, sie sind also singuläre Tangentialebenen der Fläche, welche dieselbe in diesen Kegelschnitten berühren. Eine Doppelpunktscurve hat diese Art von Flächen im allgemeinen nicht, sondern nur in dem speciellen Falle, wo zwei der vier singulären Tangentialebenen sich zu einer vereinigen, d. i. wenn jener Ausdruck vierten Grades zwei gleiche lineare Faktoren hat.

Faſst man alle Fälle zusammen, in denen eine Schaar von Ebenen, welche nicht Tangentialebenen sind, aus einer Fläche vierten Grades Kegelschnitte ausschneidet, so ergiebt sich aus denselben das allgemeine Resultat:

> Wenn eine Schaar von Ebenen, welche nicht berührende Ebenen einer Fläche vierten Grades sind, aus derselben Kegelschnitte ausschneidet, so gehen alle Ebenen dieser Schaar nothwendig durch eine feste grade Linie. Alle Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren von nicht berührenden Ebenen Kegelschnitte ausschneiden, können daher als durch Rotation eines veränderlichen Kegelschnitts um eine, in seiner Ebene liegende, feste Axe entstanden betrachtet werden.

2. Die Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren einfach berührender Ebenen Kegelschnitte ausschneiden.

Damit eine einfach berührende Ebene aus einer Fläche vierten Grades ein Kegelschnittpaar ausschneide, muſs sie nothwendig durch drei Doppelpunkte der Fläche hindurchgehen und diese Bedingung ist zugleich hinreichend, wenn nicht der Berührungspunkt mit zweien dieser Doppelpunkte in einer graden Linie liegt, welche alsdann eine grade Linie der Fläche sein muſs.

Wenn nun erstens die Ebenen der Schaar nicht alle durch einen festen Doppelpunkt der Fläche hindurchgehen, so bilden die von einer Ebene zur andern veränderlichen drei Doppelpunkte, welche jede dieser Ebenen ausschneiden muſs, eine Doppelpunktscurve dritten Grades; der Fall aber, daſs der Berührungspunkt mit zweien der übrigen drei von der Tangentialebene ausgeschnittenen Doppelpunkten stets in grader Linie liegt, tritt allemal dann, und auch nur dann ein, wenn die Fläche vierten Grades eine gradlinige ist. Also alle Flächen vierten Grades, welche eine Doppelpunktscurve dritten Grades haben und welche nicht gradlinige Flächen sind, werden von allen ihren Tangentialebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten, aus den gradlinigen Flächen vierten Grades aber schneiden die in einem Punkte berührenden Ebenen nur grade Linien mit Curven dritten Grades aus.

Untersucht man nun die besonderen Fälle, erstens, wo die Doppelpunktscurve dritten Grades eine Curve doppelter Krümmung ist, zweitens, wo sie aus einem Kegelschnitt und einer graden Linie besteht, und drittens, wo sie aus drei graden Linien besteht, so findet man:

Alle Flächen vierten Grades, welche eine Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade zur Doppelpunktscurve haben, sind nothwendig gradlinige Flächen.

Einen Kegelschnitt und eine gerade Linie als Doppelpunktscurven kann eine Fläche vierten Grades nur dann enthalten, wenn die grade Linie den Kegelschnitt in einem Punkte schneidet; alle Flächen dieser Art sind aber ebenfalls nur gradlinige.

Drei grade Doppelpunktslinien können Flächen vierten Grades nur in folgenden drei Fällen enthalten, erstens, wenn diese drei graden Linien, in eine zusammenfallend, eine dreifache Linie der Fläche bilden, zweitens, wenn zwei dieser graden Doppelpunktslinien nicht in einer Ebene liegen, die dritte aber diese beiden schneidet und drittens, wenn alle drei graden Doppelpunktslinien durch einen und denselben Punkt gehen. Der erste und zweite dieser Fälle kann aber wieder nur bei gradlinigen Flächen Statt haben, es bleibt daher nur der eine Fall übrig, wo die drei graden Doppelpunktslinien durch einen und denselben Punkt gehen, in welchem die Fläche vierten Grades im allgemeinen nicht eine gradlinige ist. Also:

> Die Flächen vierten Grades, welche drei durch einen und denselben Punkt gehende grade Doppelpunktslinien besitzen, haben die Eigenschaft, dafs alle Tangentialebenen aus denselben Kegelschnittpaare ausschneiden.

Die allgemeinste Form der Gleichung dieser Flächen ist:

$$Aq^2r^2 + Br^2p^2 + Cp^2q^2 + 2Dpqrs = 0,$$

wo p, q, r, s beliebige lineare Funktionen der Coordinaten sind, und A, B, C, D beliebige Constanten. Die drei Ebenen $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ sind diejenigen, deren drei Durchschnittslinien die Doppelpunktslinien der Fläche sind, der Durchschnittspunkt derselben $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ ist ein dreifacher Punkt der Fläche. Auf dieser Fläche liegen unendlich viele Schaaren von Kegel-

schnitten, in der Art, dafs durch jeden beliebigen Punkt des Raumes eine ganze Schaar von Ebenen geht, welche alle Kegelschnittpaare aus der Fläche ausschneiden. Alle Ebenen einer solchen Schaar hüllen einen Kegel sechsten Grades ein, welcher ein einhüllender Kegel der Fläche ist. Durch einen jeden Punkt auf der Fläche gehen unendlich viele Kegelschnitte, deren Ebenen einen Kegel vierten Grades einhüllen, welcher, wenn der Punkt auf einer der drei Doppelpunktslinien liegt, zu einem Kegel zweiten Grades wird.

Diese merkwürdige Art von Flächen vierten Grades, die einzige, auf welcher unendlich viele Schaaren von Kegelschnitten Statt haben, hat Steiner vor einer Reihevon Jahren entdeckt, er hat aber nichts davon veröffentlicht, sondern nur Hrn. Weierstrafs eine Construction derselben mitgetheilt, aus welcher dieser ihre Gleichungen in folgender Form berechnet hat:

$$x = \frac{K}{N},\quad y = \frac{L}{N},\quad z = \frac{M}{N},$$

wo K, L, M, N beliebige ganze Funktionen zweiten Grades von zwei unabhängigen Veränderlichen sind; aus dieser Form aber lassen sich die Haupteigenschaften der Fläche, namentlich die drei graden Doppelpunktslinien und der ihnen gemeinsame dreifache Punkt, welche in der oben angegebenen Form klar am Tage liegen, nur schwer erkennen.

Wenn die Schaar der einfach berührenden Ebenen, welche aus einer Fläche vierten Grades Kegelschnittpaare ausschneiden sollen, durch einen festen Doppelpunkt der Fläche hindurchgeht, so sind nur zwei der drei Doppelpunkte der Fläche, welche ausgeschnitten werden müssen, von einer Ebene der Schaar zur andern veränderlich, dieselben müssen daher eine Doppelpunktscurve zweiten Grades bilden, und umgekehrt:

> Wenn eine Fläche vierten Grades eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades und aufser dieser noch einen Doppelpunkt hat, so schneiden alle durch diesen Doppelpunkt gehenden Tangentialebenen Kegelschnittpaare aus derselben aus.

Die allgemeinste Form der Gleichung der Flächen vierten Gra-

des, welche aufser einer Doppelpunktscurve zweiten Grades noch einen Doppelpunkt haben, erhält man, indem man in der Gleichung

$$\phi^2 = 4p^2\psi$$

ψ und ϕ so wählt, dafs $\psi = 0$ einen Kegel zweiten Grades darstellt, und dafs die Fläche zweiten Grades $\phi = 0$ durch den Mittelpunkt des Kegels $\psi = 0$ hindurchgeht. Der Mittelpunkt dieses Kegels ist alsdann Doppelpunkt der Fläche, und die Schaar der durch denselben hindurchgehenden und die Fläche vierten Grades berührenden Ebenen, welche Kegelschnittpaare aus derselben ausschneidet, ist dieselbe als die Schaar der berührenden Ebenen des Kegels $\psi = 0$. Derjenige Kegel zweiten Grades, welcher in dem festen Doppelpunkte an die Fläche vierten Grades sich am genausten anschliefst, kann ebenfalls als ein solcher angesehen werden, dessen Tangentialebenen zugleich berührende Ebenen der Fläche sind, aber die Berührungspunkte derselben fallen überall mit dem festen Doppelpunkte selbst zusammen, und jede der durch dieselben ausgeschnittenen Curven hat in diesem Punkte eine Spitze und aufserdem zwei Doppelpunkte, ist also nicht ein Kegelschnittpaar, sondern eine irreductible Curve vierten Grades.

Der Fall, dafs eine Schaar berührender Ebenen durch zwei feste Doppelpunkte der Fläche hindurchgeht, welcher nur dann Statt haben kann, wenn die Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte eine auf der Fläche liegende grade Linie ist, führt auf keine besondere Art von Flächen vierten Grades mit Schaaren von Kegelschnitten.

3. Die Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren von zweifach berührenden Ebenen Kegelschnitte ausschneiden.

Jede zweifach berührende Ebene, welche ein Kegelschnittpaar aus einer Fläche vierten Grades ausschneiden soll, mufs nothwendig durch zwei Doppelpunkte der Fläche hindurch gehen. Wenn nun eine ganze Schaar solcher Ebenen Statt haben soll, so können dieselben nicht alle durch einen festen Punkt gehen, die beiden Doppelpunkte müssen daher von einer Ebene der Schaar zur andern veränderlich sein und eine Doppelpunktscurve zweiten Grades bilden, also:

Die Flächen vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades haben, werden von allen doppelt berührenden Ebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten.

Die schon oben aufgestellte Gleichung aller Flächen vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades haben, nämlich

$$\phi^2 = 4p^2\psi$$

kann man auch in folgende Form setzen:

$$(\phi + 2\lambda p^2)^2 = 4p^2(\psi + \lambda\phi + \lambda^2 p^2),$$

in welcher λ eine ganz beliebige Constante ist. Bestimmt man diese Constante in der Art, dafs die Fläche zweiten Grades

$$\psi + \lambda\phi + \lambda^2 p^2 = 0$$

eine Kegelfläche wird, so ist diese Kegelfläche eine solche, welche die Fläche vierten Grades doppelt einhüllt, in der Art, dafs jede Tangentialebene dieser Kegelfläche die Fläche vierten Grades in zwei verschiedenen Punkten berührt; die Schaar der, diesen Kegel berührenden Ebenen ist also eine Schaar doppelt berührender Tangentialebenen der Fläche vierten Grades, welche Kegelschnittpaare aus derselben ausschneiden. Die leicht zu entwickelnde Bedingung, dafs $\psi + \lambda\phi + \lambda^2 p^2 = 0$ eine Kegelfläche darstelle, führt auf eine Gleichung fünften Grades für die Constante λ, deren fünf Wurzelu fünf Kegelflächen geben, also:

Es giebt im allgemeinen fünf verschiedene Kegel zweiten Grades, deren Tangentialebenen eine Fläche vierten Grades mit einer Doppelpunktscurve zweiten Grades doppelt berühren, und Kegelschnittpaare aus derselben ausschneiden.

Wenn die Gleichung fünften Grades für λ imaginäre Wurzeln hat, so werden die denselben entsprechenden Schaaren doppelt berührender Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, ebenfalls imaginär; wenn diese Gleichung aber zwei gleiche Wurzeln hat, so treten an die Stelle der entsprechenden Schaaren doppelt berührender Ebenen nur zwei singuläre Tangential-

ebenen der Fläche vierten Grades, welche dieselbe in Kegelschnitten berühren, oder auch eine Schaar einfach berührender Ebenen, welche aber alle durch einen festen Doppelpunkt der Fläche gehen. Hat die Fläche vierten Grades aufser der Doppelpunktscurve zweiten Grades noch ein oder zwei Paare von Doppelpunkten, deren Verbindungslinien nicht durch die Doppelpunktscurve hindurchgehen, und demgemäfs eine oder zwei Schaaren von nicht berührenden Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, so bleiben von den fünf Schaaren doppelt berührender Ebenen stets nur drei oder eine übrig, weil die anderen zu singulären Tangentialebenen der Fläche werden.

Für die Dupinsche Cyclide hat die Gleichung fünften Grades, welche die fünf Schaaren doppelt berührender Ebenen bestimmt, zwei Paare gleicher Wurzeln, welchen die vier singulären Tangentialebenen dieser Fläche entsprechen (von denen zwei stets imaginär sind); die fünfte Wurzel dieser Gleichung aber giebt einen wirklichen Kegel zweiten Grades, dessen Tangentialebenen Kegelschnittpaare aus der Cyclide ausschneiden. Hr. Stud. Schwarz, dem ich die Existenz dieser, wie ich glaube früher noch nicht bemerkten Schaar von Kegelschnittpaaren auf der Cyclide mitgetheilt habe, hat gefunden, dafs dieselbe stets eine Doppelschaar von Kreisen ist, dafs also diese Fläche nicht nur auf zwei, sondern sogar auf vier verschiedene Weisen durch Bewegung eines veränderlichen Kreises erzeugt werden kann.

Endlich sind hier noch die gradlinigen Flächen vierten Grades zu erwähnen. Die doppelt berührenden Ebenen derselben gehen stets durch zwei der erzeugenden Graden, sie schneiden also aufser diesen beiden graden Linien nothwendig noch Kegelschnitte aus, welche auch selbst wieder in zwei grade Linien zerfallen können. Also:

> Alle doppelt berührenden Ebenen der gradlinigen Flächen vierten Grades schneiden aus denselben zwei grade Linien und einen Kegelschnitt aus.

Hr. Weierstrafs knüpfte an das Vorstehende folgende Bemerkung an:

Auf die merkwürdige Fläche, welche Hr. Kummer in seinem Vortrage als eine von Steiner entdeckte anführt, ist dieser, wie ich von ihm erfahren habe, gekommen, als er sich vor etwa fünfundzwanzig Jahren mit Untersuchungen über polare Beziehungen zwischen Punkten und Systemen von Linien und Flächen zweiten Grades beschäftigte. Da ich Grund habe zu bezweifeln, dafs sich in den hinterlassenen Papieren unseres verstorbenen Collegen über diesen Gegenstand etwas Zusammenhängendes finden werde, so möge es mir gestattet sein, bei dieser Gelegenheit das mir vor einigen Jahren darüber Mitgetheilte, so unvollständig es sein möge, bekannt zu machen.

Die erwähnten Untersuchungen hatten Steiner zu folgendem Satze geführt, vermittelst dessen man, wenn man sich alle möglichen Flächen zweiten Grades denkt, jeder derselben einen bestimmten Punkt des Raumes zuordnen kann.

> Man nehme eine solche Fläche $\mathfrak{P}_0$ willkührlich an, und auf derselben einen festen Punkt A; zieht man dann von diesem aus irgend drei Sehnen AL, AM, AN, welche dreien conjugirten Durchmessern einer andern Fläche $\mathfrak{P}$ parallel sind, und legt durch die Endpunkte L, M, N derselben eine Ebene, so geht diese stets durch einen Punkt P, dessen Lage — nachdem $\mathfrak{P}_0$ und A fixirt sind — blofs von der Fläche $\mathfrak{P}$ abhängt, und der Pol der letztern heifsen möge.

Ich mufs jedoch bemerken, dafs dieser interessante Satz, der sich nach Steiner's Angabe synthetisch auf sehr einfache Weise ergeben soll, bereits im Jahre 1837 von Hrn. Hesse veröffentlicht und analytisch bewiesen worden ist [1]). Betrachtet man nun die Schaar derjenigen Flächen $\mathfrak{P}$, welche durch die Schnittlinie zweier bestimmten, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, gehen, und untersucht den geometrischen Ort ihrer Pole; so ergiebt sich, dafs derselbe ein Kegelschnitt ist.

---

[1]) Crelle's Journal B. 18. pag. 110.

Dieses vorausgesetzt nehme man drei Flächen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ an und denke sich zunächst durch die Schnittlinie zweier von ihnen eine neue gelegt, und dann wieder eine durch den Durchschnitt dieser und der dritten; so gelangt man zu einem System von Fläche $\mathfrak{P}$, welche man den Punkten einer Ebene in der Art zuordnen kann, dafs jeder graden Linie der letztern eine vollständige Schaar solcher Flächen zweiten Grades entspricht, welche eine gemeinschaftliche Schnittlinie haben. Daraus folgt, nach dem vorhergehenden Satze, dafs die Pole der $\mathfrak{P}$ eine Fläche bilden, auf welcher unendlich viele Schaaren von Kegelschnitten liegen, oder welche — was dasselbe besagt — auf unendlich viele Arten durch Bewegung eines veränderlichen Kegelschnitts erzeugt werden kann.

Diese Fläche ist nun identisch mit der von Hrn. Kummer in der vorstehenden Abhandlung §. 2. aufgestellten, indem sie die charakteristischen Eigenschaften der letztern besitzt. Steiner hatte nämlich gefunden, dafs, wenn man einen der angegebenen Kegelschnitte betrachtet, in der Ebene desselben stets noch ein zweiter liege, und daraus den Schlufs gezogen, dafs die Fläche vom vierten Grade sein müsse. Ferner hatte er erkannt, dafs die Ebenen zweier solcher Kegelschnitte in einem der vier Durchschnittspunkte derselben die Fläche berühre, und dafs der geometrische Ort der drei andern ein System von drei graden, in der Fläche liegenden und in einem ausgezeichneten Punkte derselben sich scheidenden Linien sei.

Durch welche Betrachtungen Steiner diese Eigenschaften seiner Fläche ermittelt hat, kann ich nicht angeben. Analytisch sind sie leicht aufzufinden, indem man aus der hier angegebenen geometrischen Construction der Fläche die von Hrn. Kummer aufgestellte Gleichung derselben ableitet, was bei einer passenden Wahl der Flächen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ in dem betrachteten System nicht schwer ist.

Gaylord Bros.
Makers
Syracuse, N. Y.
PAT. JAN. 21, 1908

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
516.35K96U C001
UBER DIE FLACHEN VIERTEN GRADES [BERLIN
3 0112 017266047